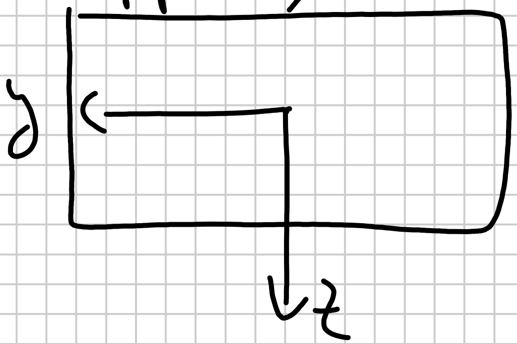
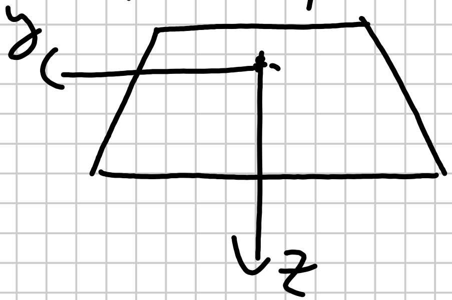
Symmetrische Querschnitte

Doppelt symmetrisch



Einfach symmetrisch



→ z-Achse ist Symmetrieachse

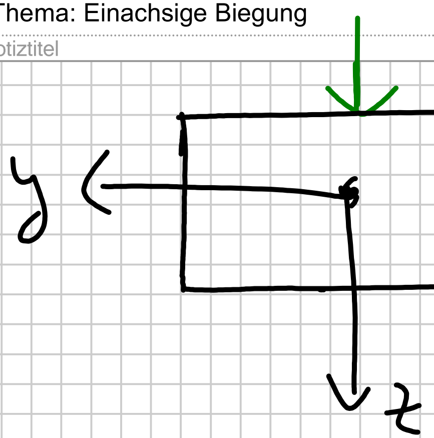
→ y-z-Achsen sind Hauptachsen

→ Gerade Biegung:
Resultierende Kraft in Richtung einer Hauptachse

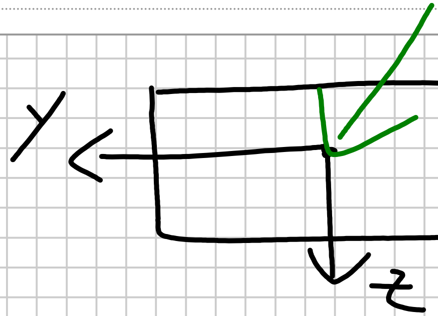
→ schiefe Biegung:
Resultierende Kraft nicht in Richtung einer der Hauptachsen

Webinar: Elastostatik
Thema: Einachsige Biegung

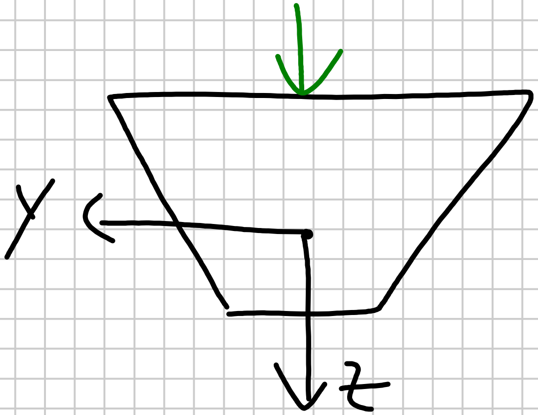
Notiztitel 30.08.2016



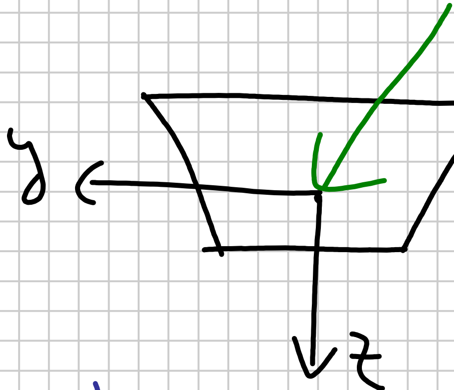
Gerade Biegung



schiefe Biegung

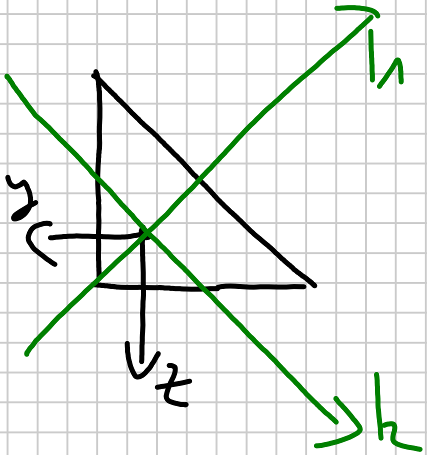


Gerade Biegung



schiefe Biegung

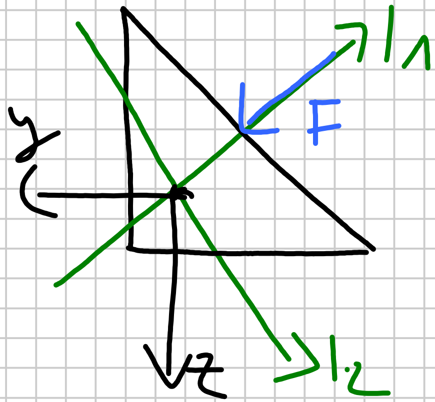
Symmetrische Querschnitte
bezgl. y-z-Achse



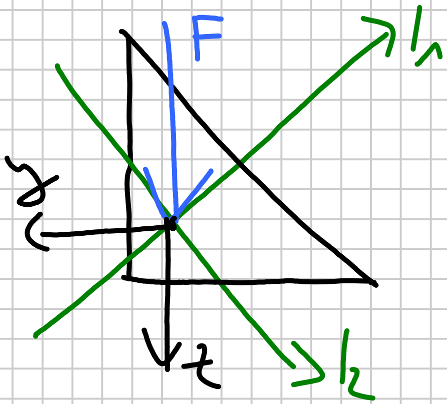
Unsymmetrischer Querschnitt

- y-z-Achsen sind keine Hauptachsen
- l_1, l_2 Hauptachsen
- Gerade Biegung: Resultierende Kraft in Richtung einer Hauptachse
- schiefe Biegung: Resultierende Kraft nicht in Richtung einer Hauptachse

- Symmetrische Querschnitte: y-z-Achse sind Hauptachsen
- Unsymmetrische Querschnitte: y-z-Achse sind keine Hauptachsen



Gerade Biegung



schiefe Biegung

Vorgehensweise:

1. Resultierende Kraft berechnen:

→ alle auf den Balken wirkenden Kräfte zu einer Kraft zusammenfassen

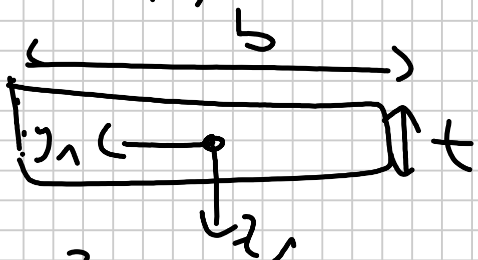
2. Zeigt die Kraft in Richtung einer Hauptachse?

Ja: Gerade Biegung

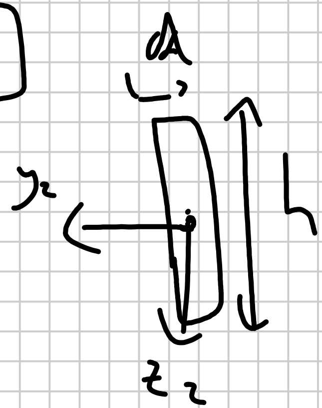
Nein: Schiefe Biegung

1) $I_y = \sum_{i=1}^{n} \left[I_{y_i} + z_{s_i}^2 \cdot A_i \right]$

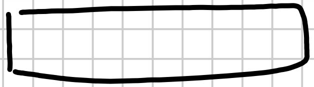
1.



2.



3.

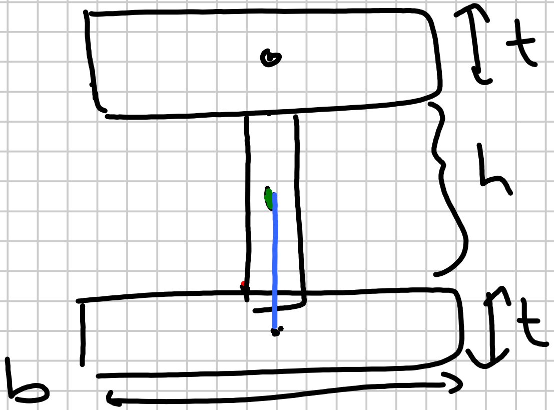


$$I_{y_1} = \frac{t^3 \cdot b}{12}$$

$$I_{y_2} = \frac{h^3 \cdot d}{12}$$

$$I_{y_3} = \frac{t^3 \cdot b}{12}$$

ingenieurkurse.de
Interaktive Online-Kurse



$$z_{s_1}^2 = \left(\frac{t}{2} + \frac{h}{2}\right)^2 \qquad z_{s_2}^2 = 0 \qquad z_{s_3} = \left(\frac{t}{2} + \frac{h}{2}\right)^2$$

$$A_1 = b \cdot t \qquad A_2 = h \cdot d \qquad A_3 = b \cdot t$$

$$I_y^* = \sum \left[I_{y_i} + z_{s_i}^2 \cdot A_i \right]$$

$i=1$: $\dfrac{t^3 \cdot b}{12} + \left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{h}{2}\right)^2 \cdot t \cdot b$

$i=2$: $\dfrac{h^3 \cdot d}{12} + 0 \cdot h \cdot d$

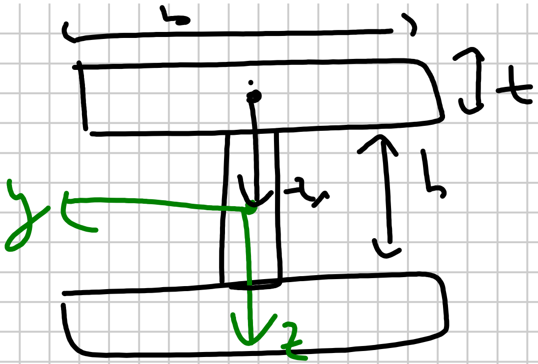
$i=3$: $\dfrac{t^3 \cdot b}{12} + \left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{h}{2}\right)^2 \cdot t \cdot b$

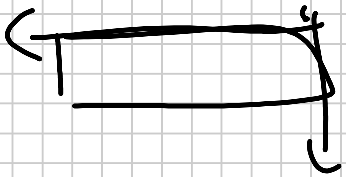
$$I_y^* = \frac{t^3 \cdot b}{12} + \left(\frac{t}{2} + \frac{h}{2}\right)^2 \cdot t \cdot b + \frac{h^3 \cdot a}{12} + \frac{t^3 \cdot b}{12} + \left(\frac{t}{2} + \frac{h}{2}\right)^2 \cdot t \cdot b$$

$$I_y^* = \frac{t^3 \cdot b}{6} + \left(\frac{t}{2} + \frac{h}{2}\right)^2 \cdot t \cdot b + \frac{h^3 \cdot a}{12} + \left(\frac{t}{2} + \frac{h}{2}\right)^2 \cdot t \cdot b$$

$$I_y^* = \frac{t^3 \cdot b}{6} + \left(\frac{t^2}{4} + \frac{1}{2} t \cdot h + \frac{h^2}{4}\right) \cdot t \cdot b + \frac{h^3 \cdot a}{12} + \left(\frac{t^2}{4} + \frac{1}{2} t \cdot h + \frac{h^2}{4}\right) \cdot t \cdot b$$

$$\boxed{I_y^* = \frac{h^3 \cdot a}{12} + \frac{2 t^3 \cdot b}{3} + \frac{h^2 \cdot t \cdot b}{2} + t^2 \cdot b \cdot h}$$





$$I_{z_1} = \frac{b^3 \cdot t}{12} \qquad I_{z_2} = \frac{a^3 \cdot h}{12} \qquad I_{z_3} = \frac{b^3 \cdot t}{12}$$

$$y_{s_1}^2 = 0 \qquad y_{s_2}^2 = 0 \qquad y_{s_3}^2 = 0$$

$$A_1 = b \cdot t \qquad A_2 = h \cdot a \qquad A_3 = b \cdot t$$

$i=1: \quad \dfrac{b^3 \cdot t}{12}$

$i=2: \quad \dfrac{a^3 \cdot h}{12}$

$i=3: \quad \dfrac{b^3 \cdot t}{12}$

$$\boxed{I_t^* = \frac{b^3 \cdot t}{6} + \frac{a^3 \cdot h}{12}}$$

$$EIw^{IV} = q(x) = q_0$$

$$EIw''' = \int q_0 \cdot dx = q_0 \cdot x + C_1$$

$$\boxed{EIw'' = \frac{1}{2} q_0 \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2} = -M(x)$$

$$EIw' = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} q_0 \cdot x^3 + \frac{1}{2} C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x + C_3$$

$$EIw' = \frac{1}{6} q_0 \cdot x^3 + \frac{1}{2} C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x + C_3$$

$$EIw = \frac{1}{24} \cdot q_0 \cdot x^4 + \frac{1}{6} \cdot C_1 \cdot x^3 + \frac{1}{2} C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x + C_4$$

Festlager: $x = 0$

$$\boxed{w = 0 \,, \quad M = 0}$$

$$EI \cdot 0 = C_4 \longrightarrow \boxed{C_4 = 0}$$

$$\boxed{M(x) = -\frac{1}{2} q_0 \cdot x^2 - C_1 \cdot x - C_2} = -EIw''$$

$$0 = -\frac{1}{2} q_0 \cdot 0^2 - C_1 \cdot 0 - C_2 \longrightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

ingenieurkurse.de
Interaktive Online-Kurse

Loslager: $x = l$

$\boxed{w = 0, \; M = 0}$

$$0 = -\frac{1}{2} q_0 \cdot l^2 - C_1 \cdot l - 0$$

$$\boxed{C_1 = -\frac{1}{2} q_0 \cdot l}$$

Einsetzen: $w = 0$, $x = l$, $C_2 = C_4 = 0$
$C_1 = -\frac{1}{2} q_0 \cdot l$

$$EI \cdot 0 = \frac{1}{24} q_0 \cdot l^4 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} q_0 \cdot l^4 + C_3 \cdot l$$

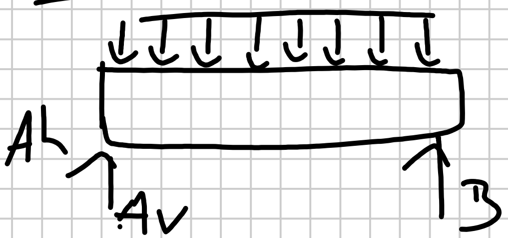
$$\boxed{C_3 = \frac{1}{24} \cdot q_0 \cdot l^3}$$

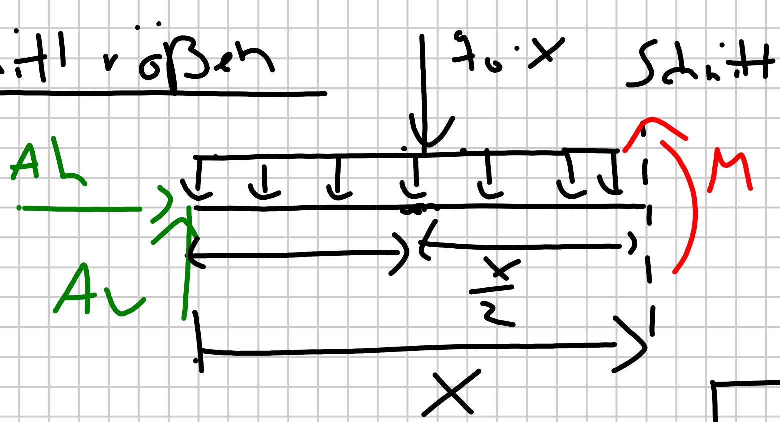
$$EIw = \frac{1}{24} \cdot q_0 \cdot x^4 - \frac{1}{12} q_0 \cdot l \cdot x^3 + \frac{1}{24} q_0 \cdot l^3 \cdot x$$

$$EIw = \frac{1}{24} q_0 \left(x^4 - 2 \cdot l \cdot x^3 + l^3 \cdot x \right)$$

$$\boxed{w = \frac{1}{24 EI} q_0 \left(x^4 - 2 \cdot l \cdot x^3 + l^3 \cdot x \right)}$$

Alternative: Schnittgrößen





$$\circlearrowleft: +M - A_v \cdot x + q_0 \cdot x \cdot \left(x - \frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\boxed{M = A_v \cdot x - \frac{1}{2} q_0 \cdot x^2}$$

$$EIw'' = -M(x)$$

$$EIw'' = -A_v \cdot x + \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot x^2$$ (Lagerkraft bestimmen)

-> 2 mal integrieren und Integrationskonstante C_1 und C_2 mit Randbedingung $w=0$ für $x=0$ und $w=0$ für $x=l$ bestimmen.

$$\sigma_x = \frac{|M_y(x)|}{W_y} \qquad W_y = \frac{I_y}{|z|_{max}}$$

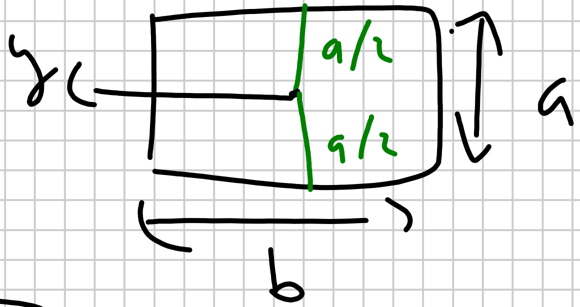
$$EIw'' = -M(x) = \frac{1}{2} q_0 \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2$$

$$M(x) = -\frac{1}{2} q_0 \cdot x^2 - C_1 \cdot x - C_2$$

$$C_1 = -\frac{1}{2} q_0 \cdot l$$

$$C_2 = 0$$

$$M(x) = -\frac{1}{2} q_0 \cdot x^2 + \frac{1}{2} q_0 \cdot l \cdot x$$



$$\boxed{I_y = \frac{a^3 \cdot b}{12}}$$

$$\boxed{|z|_{max} = \frac{a}{2}}$$

$$W_y = \frac{\frac{a^3 \cdot b}{12}}{\frac{a}{2}}$$

$$\sigma_{max} = \frac{\left|-\frac{1}{2} q_0 \cdot x^2 + \frac{1}{2} q_0 \cdot l \cdot x\right|}{\frac{\frac{a^3 \cdot b}{12}}{\frac{a}{2}}}$$

$$\frac{\frac{a^3 \cdot b}{12}}{\frac{a}{2}} = \frac{a^3 \cdot b \cdot 2}{12\,a} = \frac{a^2 \cdot b}{6}$$

$$\sigma_{max} = \frac{6 \cdot \left| -\frac{1}{2} q_0 \cdot x^2 + \frac{1}{2} q_0 \cdot l \cdot x \right|}{a^2 \cdot b}$$